**12. Нормальное распределение**

**Определение.** Нормальным (или гауссовским) распределением называется непрерывное распределение с плотностью

График плотности изображен на Рисунке 12.1.

С помощью интеграла Пуассона (см. МП )

проверяем условие нормировки

Математическое ожидание случайной величины с нормальным распределением равно нулю,

поскольку функция *x* нечетна, а четна: . Следовательно, дисперсия равна

интеграл вычисляем по частям:

Это распределение далее будет называться ***стандартное нормальное*** и символически обозначаться . Его функцию распределения обозначим

также ноликом будем отмечать плотность стандартного нормального:

Так как симметрична относительно 0, то и справедливо соотношение

Вероятности событий, связанных со случайной величиной (значок будет обозначать фразу: ”случайная величина … имеет распределение …”), вычисляются с помощью функции :

В тех задачах, где необходимо найти, при каком вероятность принимает заданное значение,

(0

применяется обратная функция:

Пусть *a* – произвольное число, *σ* > 0; сделаем линейное преобразование случайной величины ,

тогда

Это распределение называется нормальным распределением общего вида.

На рисунке 12.1. показан характер зависимости нормального распределения от параметров *a*, *σ*.

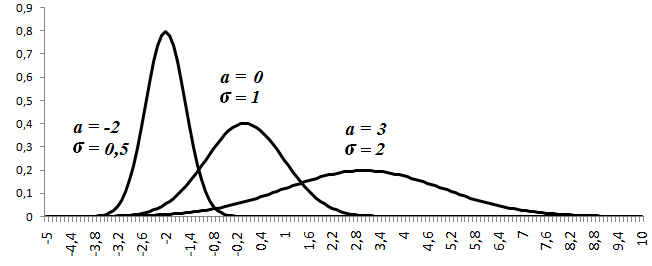


Рисунок 12.1. Плотность нормального распределения

Из свойств математического ожидания и дисперсии следует, соответственно, обозначение нормального распределения общего вида будет:

Докажем следующее очень важное

**Утверждение 12.1**. Если две случайные величины распределены по нормальному закону и независимы, то их сумма также имеет нормальное распределение. Пусть то есть,

тогда плотность распределения суммы, согласно ( ), будет сверткой

Обозначим для краткости записи *Q(u)* выражение в квадратных скобках:

- квадратичная форма

Используя обозначения

и, выделяя полный квадрат по *u*, получим

так что плотность распределения примет вид:

Осталось выполнить некоторые преобразования, чтобы привести ее к нужному виду:

обозначив , сгруппируем здесь слагаемые так чтобы сформировался квадратичный трехчлен относительно , тогда найдем,

Плотность теперь можно переписать так:

Но вторая часть этого выражения (интеграл с нормировочной константой перед ним) есть просто интеграл от плотности нормального распределения потому он равен 1, и поскольку то оставшаяся часть равна

а это есть не что иное как плотность нормального распределения